Differentiation Rules.

Definition. If $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is a linear map, then the <u>operator norm</u> or <u>norm</u> $\|T\| = \max\limits_{\|\vec{x}\|=1} \|T(\vec{x})\|$.

Lemma. $\|T(\vec{x})\| \leq \|T\|\,\|\vec{x}\|$, for any $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposition. Suppose $U \subset \mathbb{R}^n$ is open, $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $\vec{g}: U \to \mathbb{R}^m$ and $K: U \to \mathbb{R}$. Suppose $\vec{a} \in U$, $\vec{f}, \vec{g}, K$ differentiable at $\vec{a}$.

1. $\vec{f}+\vec{g}: U \to \mathbb{R}^m$ is differentiable at $\vec{a}$ and $D(\vec{f}+\vec{g}) = D\vec{f} + D\vec{g}$
2. $K\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$ is diff. at $\vec{a}$ and $(D(K\vec{f})(\vec{a}))(\vec{v})$ for $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ is given by $((DK)(\vec{a}))(\vec{v}) \cdot \vec{f}(\vec{a}) + K(\vec{a})(D\vec{f}(\vec{a}))(\vec{v})$.

Cor. 3. If $m=1$, so $f, g: U \to \mathbb{R}$, then $f \cdot g$ is differentiable at $\vec{a}$ and
$$D(f\cdot g)(\vec{a})\,\vec{v} = (Df(\vec{a})\,\vec{v})\,g(\vec{a}) + f(\vec{a})(Dg(\vec{a})\,\vec{v}).$$

Example. $K\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xe^y \quad \vec{f}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin xy \\ y+3x \end{bmatrix}$.

Proof (of 2). (Advanced sneaking)

$$\lim_{\vec{h}\to 0} \frac{K\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - K\vec{f}(\vec{a}) - (DK(\vec{a})\vec{h} \cdot \vec{f}(\vec{a}) + K(\vec{a})\, D\vec{f}(\vec{a})\,\vec{h})}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{K(\vec{a}+\vec{h})\,\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - K(\vec{a})\,\vec{f}(\vec{a}) - DK(\vec{a})\vec{h}\,\vec{f}(\vec{a}) - K(\vec{a})D\vec{f}(\vec{a})\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{\begin{array}{c} K(\vec{a}+\vec{h})\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - K(\vec{a})\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) + K(\vec{a})\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - K(\vec{a})\vec{f}(\vec{a}) \\ - DK(\vec{a})\vec{h}\vec{f}(\vec{a}) - K(\vec{a})D\vec{f}(\vec{a})\vec{h} \end{array}}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{(K(\vec{a}+\vec{h})-K(\vec{a}))\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) + (f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a}))K(\vec{a}) - DK(\vec{a})\vec{h}\, f(\vec{a}) - K(\vec{a})D\vec{f}(\vec{a})\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{(K(\vec{a}+\vec{h})-K(\vec{a}))\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - DK(\vec{a})\vec{h}\, f(\vec{a})}{\|\vec{h}\|}$$

$$+ \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} K(\vec{a}) \frac{f(\vec{a}+\vec{h})-f(\vec{a}) - Df(\vec{a})\vec{h}}{\|\vec{h}\|} \to 0$$

b/c f is diff. at $\vec{a}$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{(K(\vec{a}+\vec{h})-K(\vec{a}))\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - DK(\vec{a})\vec{h}\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})}{\|\vec{h}\|} \to 0$$

b/c we can factor out $\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})$ and K is diff. at $\vec{a}$

$$+ \lim_{\vec{h}\to 0} \frac{DK(\vec{a})\vec{h}\vec{f}(\vec{a}+\vec{h}) - DK(\vec{a})\vec{h}\vec{f}(\vec{a})}{\|\vec{h}\|}$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} \frac{DK(\vec{a})\vec{h}}{\|\vec{h}\|} \cdot \left(\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{a})\right)$$

$$= \lim_{\vec{h}\to\vec{0}} DK(\vec{a})\left(\frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}\right)\left(\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{a})\right)$$

Now $\left\| DK(\vec{a})\left(\frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}\right)\left(\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{a})\right)\right\|$

$$\leq \|DK(\vec{a})\| \, \|\vec{f}(\vec{a}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{a})\| \to 0$$

b/c f is cts at $\vec{a}$ as well. □

Theorem (Chain Rule) Suppose $\vec{g}:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $\vec{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{g}$ is differentiable at $\vec{a}$ and $\vec{f}$ is differentiable at $\vec{g}(\vec{a})$. Then $(\vec{f}\circ\vec{g}):\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ is differentiable at $\vec{a}$

$$D(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{a}) = D\vec{f}(\vec{g}(\vec{a}))\circ D\vec{g}(\vec{a})$$

Cor. $$\underbrace{[D(\vec{f}\circ\vec{g})(\vec{a})]}_{m\times p} = \underbrace{[D\vec{f}(\vec{g}(\vec{a}))]}_{m\times n}\underbrace{[D\vec{g}(\vec{a})]}_{n\times p}$$

matrix multiplication.

Proof. (Not done, in book).

Example. $f\left(\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\right) = xyz^2 + e^{3xy-z}$, at time t, $\vec{g}(t) = \begin{bmatrix} 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ and $\vec{g}'(t) = \begin{bmatrix} -1\\ 1\\ 2\end{bmatrix}$. Find $(f\circ\vec{g})'(t)$.

Example. $f\left(\begin{bmatrix} x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2-y^2\\ 2xy\end{bmatrix}$ $g\left(\begin{bmatrix} u\\ v\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u\cos v\\ u\sin v\end{bmatrix}$